Exercice 1

En raison de la source ponctuelle d'énergie-chaleur, le domaine $]0, 2\ell[$ doit être décomposé en deux intervalles réguliers $]0, \ell[$ et $]\ell, 2\ell[$ pour lesquels on peut écrire les équations différentielles suivantes

$$-\kappa[\mathrm{d}^2T(x)/\mathrm{d}x^2] + \rho T(x) = 0 \qquad 0 < x < \ell$$

$$-\kappa[\mathrm{d}^2T(x)/\mathrm{d}x^2] + \rho T(x) = 0 \qquad \ell < x < 2\ell$$

avec la condition de continuité en $x = \ell$

$$\lim_{x\to\ell^+} \kappa[\mathrm{d}T(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x\to\ell^-} \kappa[\mathrm{d}T(x)/\mathrm{d}x] = -Q$$

En intégrant séparément les deux fonctions résiduelles pondérées par une température virtuelle δT et en effectuant une intégration par parties, on trouve

$$\int_0^{\ell^-} [-\kappa(\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2) + \rho T]\delta T\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ell^-} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{\ell^-}$$

$$\int_{\ell^+}^{2\ell} [-\kappa(\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2) + \rho T]\delta T\,\mathrm{d}x = \int_{\ell^+}^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_{\ell^+}^{2\ell}$$

La réunion des deux tronçons conduit à la forme intégrale du problème

$$\int_0^{\ell^-} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x + \int_{\ell^+}^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x$$

$$- [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{\ell^-} - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_{\ell^+}^{2\ell} = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

ou encore

$$\int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{\ell^-} - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_{\ell^+}^{2\ell} = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

En insérant la condition de continuité dans cette expression, on obtient

$$\int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x + [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_{x=0}$$

$$- [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_{x=2\ell} - Q\delta T(\ell) = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

Notons que formellement il aurait été possible d'aboutir au même résultat en insérant d'entrée l'impulsion de Dirac dans l'intégrale

$$\int_0^{2\ell} [-\kappa(\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2) + \rho T - Q\delta_\ell]\delta T\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

$$\int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T - Q\delta_\ell\delta T]\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{2\ell} = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

$$\int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x) + \rho T\delta T]\mathrm{d}x - Q\delta T(\ell) - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{2\ell} = 0 \qquad \forall\ \delta T$$

Comme les deux conditions aux limites

$$[\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\Big|_{x=0} = t$$

$$[\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\Big|_{x=2\ell} = -r\,T(2\ell)$$

sont de type naturel, elles doivent être directement intégrées dans la formulation intégrale, ce qui donne

$$\int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x)+\rho T\delta T]\,\mathrm{d}x + t\delta T(0) + rT(2\ell)\delta T(2\ell) - Q\delta T(\ell) \;=\; 0 \qquad \forall\ \delta T$$

La forme faible revient ainsi à rechercher

$$T\in\ \mathcal{U}\ :\ \int_0^{2\ell} [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x)+\rho T\delta T]\,\mathrm{d}x + rT(2\ell)\delta T(2\ell)$$
$$= -t\delta T(0) + Q\delta T(\ell) \qquad \forall\ \delta T\ \in\ \mathcal{V}$$

où les classes de fonctions s'écrivent

$$\mathcal{U}\ =\ \mathcal{V}\ =\ \{w(x)\,|\,w(x)\in H^1(]0,\,2\ell[)\}$$

avec

$$H^1(]0,\,2\ell[)\ =\ \{w(x)\,|\,\int_0^{2\ell} [(\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)^2 + w^2]\,\mathrm{d}x < \infty\}$$

Exercice 2

La forme forte du problème a pour expression

$$\varphi(x)\in C^2([0,\,\ell])\ :\ -GI_p\,(\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}x^2)\ =\ -m_t \qquad 0<x<\ell$$

avec les conditions aux limites naturelles

$$GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)\big|_{x=0}\ =\ 0$$

$$GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell}\ =\ M_t$$

La formulation intégrale associée s'écrit

$$\int_0^{\ell} [-GI_p\,(\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}x^2) + m_t]\delta\varphi\,\mathrm{d}x\ =\ 0 \qquad \forall\ \delta\varphi$$

où $\delta\varphi$ dénote l'angle de rotation virtuel. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_0^{\ell} GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta\varphi/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - [GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)\delta\varphi]\big|_0^{\ell}\ =\ -\int_0^{\ell} m_t\delta\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall\ \delta\varphi$$

Par insertion des deux conditions de bord naturelles (type Neumann), cette expression devient

$$\int_0^{\ell} GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta\varphi/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - M_t\,\delta\varphi(\ell)\ =\ -\int_0^{\ell} m_t\delta\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall\ \delta\varphi$$

de sorte que la forme faible du problème revient à rechercher

$$\varphi\in\ \mathcal{U}\ :\ \int_0^{\ell} GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta\varphi/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x\ =\ M_t\,\delta\varphi(\ell) - \int_0^{\ell} m_t\delta\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall\ \delta\varphi\ \in\ \mathcal{V}$$

avec les classes de fonctions suivantes

$$\mathcal{U}\ =\ \mathcal{V}\ =\ \{w(x)\,|\,w(x)\in H^1(]0,\,\ell[)\}$$

où w est indifféremment l'angle de rotation φ ou sa contrepartie virtuelle $\delta\varphi$.

Comme les deux conditions de bord sont naturelles pures (conditions de Neumann) et qu'aucun rappel élastique n'apparaît dans la formulation, la solution et sa contrepartie virtuelle sont définies à une constante près. Les remplacements

$$\varphi \;\rightarrow\; \varphi + c$$
$$\delta\varphi \;\rightarrow\; \delta\varphi + d$$

où c et d sont deux constantes satisfont dès lors aussi la forme faible

$$\varphi \in \mathcal{U} \;:\; \int_0^\ell GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta\varphi/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \;=\; M_t\,[\delta\varphi(\ell) + d] - \int_0^\ell m_t\,(\delta\varphi + d)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta\varphi \in \mathcal{V}$$

En réarrangeant les termes, on peut écrire

$$\int_0^\ell GI_p\,(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta\varphi/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\ell m_t\delta\varphi\,\mathrm{d}x - M_t\,\delta\varphi(\ell) \;=\; d\left(M_t - \int_0^\ell m_t\,\mathrm{d}x\right) \qquad \forall\;\delta\varphi$$

où le membre gauche de l'égalité est nul par définition de la forme faible. On trouve alors l'équation de compatibilité que doivent vérifier les conditions aux limites

$$0 \;=\; M_t - \int_0^\ell m_t\,\mathrm{d}x$$

dont on extrait la valeur du moment de torsion M_t à l'extrémité $x = \ell$, compte tenu de l'allure du moment réparti m_t,

$$M_t \;=\; \int_0^\ell m_t\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\ell 4\mu\frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}\mu\,\ell$$

Exercice 3

En choisissant un élément fini à deux points nodaux, les fonctions de base ne pourront comporter que deux monômes indépendants. Il est alors impossible de construire sur l'élément des fonctions quadratiques à trois monômes qui respectent le critère de complétude ou complétion (il existe une infinité de polynômes du deuxième degré prenant une valeur unitaire en un nœud et s'annulant à l'autre). Il est alors nécessaire de rajouter un point nodal à l'élément qui en comportera trois au total, autorisant trois monômes linéairement indépendants et, par conséquent, la construction de trois polynômes quadratiques complets.

Prenant une valeur unitaire au nœud correspondant et une valeur nulle aux deux autres points nodaux, les fonctions de base ${}^e h_i$ (i = 1, 2, 3) d'un élément quadratique sont construites par produit normé de deux polynômes linéaires, conduisant à des polynômes dits de Lagrange. On trouve ainsi

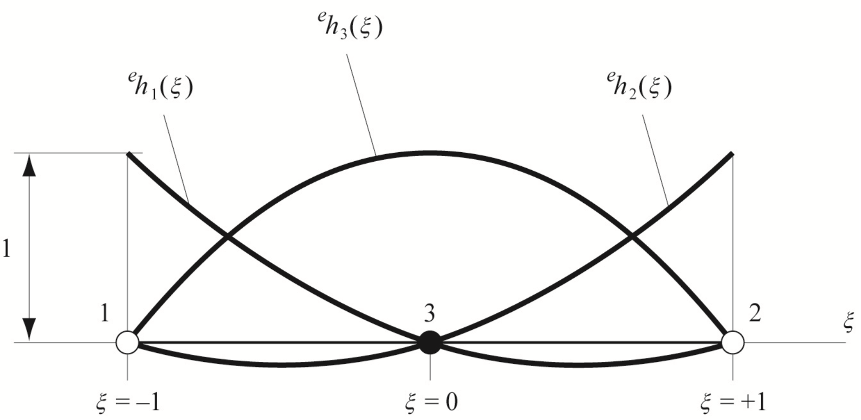
$${}^e h_1(\xi) \;=\; \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)}\frac{(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_3)} \;=\; \frac{(\xi - 1)}{(-1-1)}\frac{(\xi - 0)}{(-1-0)} \;=\; \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$${}^e h_2(\xi) \;=\; \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)}\frac{(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_3)} \;=\; \frac{(\xi + 1)}{(+1+1)}\frac{(\xi - 0)}{(+1-0)} \;=\; \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$${}^e h_3(\xi) \;=\; \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_3 - \xi_1)}\frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_2)} \;=\; \frac{(\xi + 1)}{(0+1)}\frac{(\xi - 1)}{(0-1)} \;=\; 1 - \xi^2$$

où ξ = [–1, +1] est la coordonnée naturelle de l'élément et $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = +1$ et $\xi_3 = 0$ sont les abscisses des trois points nodaux (dans l'ordre, nœuds d'extrémité, nœud central).

On relèvera que ces fonctions sont différentiables à l'intérieur de l'élément fini et qu'elles sont continues d'un élément à un autre puisqu'en un nœud d'extrémité elles valent 0 ou 1.


${}^{e}h_3(\xi)$
${}^{e}h_1(\xi)$
${}^{e}h_2(\xi)$
1
1
3
2
ξ
$\xi = -1$
$\xi = 0$
$\xi = +1$